Starting Finance Club Bocconi - Portfolio Management Division

Equity Options: Hands-On Approach con Black-Scholes

Supervisors

Angelo Truono, Mattia Canta

Team leader

Giulio Davoli

Team members

Elia Marenco, Davide Saccone, Luca Favazzo, Matteo Strollo, Nick Bernardini

April 2024

Indice

1 Introduzione

Il seguente paper intende approfondire il più tradizionale modello di pricing delle opzioni (Black-Scholes) e discutere delle sue potenziali applicazioni pratiche.

Per partire dalle basi, le opzioni sono strumenti finanziari derivati, ovvero titoli finanziari il cui payoff dipende dall'andamento di uno strumento finanziario differente, detto sottostante (*underlying*). In particolare, ci concentreremo su tre tipologie di sottostanti: azioni che pagano dividendi, azioni che non pagano dividendi e futures su indici.

Essenzialmente, le opzioni sono contratti che offrono all'acquirente la facoltà, non l'obbligo, di acquistare o vendere lo strumento sottostante ad un prezzo d'esercizio (*strike price*) specificato in un determinato periodo di tempo. Tale facoltà ha ovviamente un costo, ovvero il premio dell'opzione (*premium*) il cui valore è oggetto di indagine da parte del modello che intendiamo analizzare.

È importante subito specificare che le opzioni si dividono in due categorie: le opzioni americane e le opzioni europee. La differenza risiede nel fatto che le prime possono essere esercitate in un qualsiasi momento entro la scadenza del contratto, mentre le seconde solamente alla scadenza esatta. Oltre a queste due categorie di opzioni esiste un ulteriore insieme di strumenti che prende il nome di opzioni esotiche. Tra queste, è opportuno citare le *Bermudian Options*, le quali offrono la possibilità di esercitare il diritto in una serie di date ben definite prima della scadenza. L'origine del nome suggerisce proprio che queste siano una via di mezzo tra la poca flessibilità delle opzioni europee e la libertà di esercizio fornita da quelle americane; le isole Bermuda sono infatti localizzate esattamente tra l'Europa e il Nord America. La flessibilità delle Bermudian è quindi maggiore di quelle europee ma minore di quelle americane. Al di là del modello matematico di Black-Scholes che andremo a dettagliare, è chiaro che maggiore è la flessibilità offerta all'acquirente dall'opzione, maggiore sarà il premio da pagare a parità di tutte le altre variabili; per cui, il prezzo per le americane o le Bermudian sarà maggiore o uguale rispetto a quello delle opzioni europee (uguale nel caso in cui la probabilità di esercizio dell'opzione prima della scadenza prezzata dal mercato sia nulla). Le azioni, essendo quotate, subiscono variazioni di prezzo ogni giorno e questo è il motivo per cui la libertà di esercitare il diritto in qualsiasi momento prima della scadenza comporta una maggiorazione del premio.

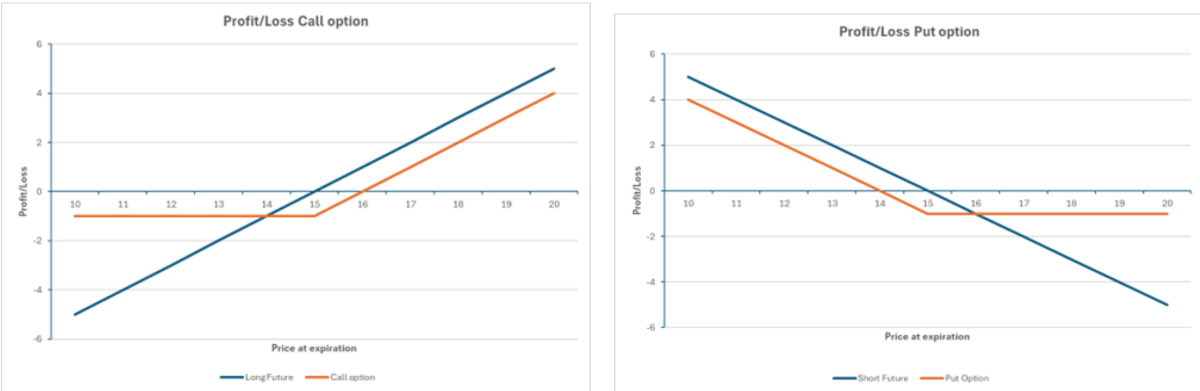
Il modello che analizzeremo è valido per le opzioni europee, fattispecie in cui si ha quindi la certezza dell'istante temporale in cui si avrà la facoltà di esercitare il diritto di acquisto/vendita. Per questa ragione di seguito si farà riferimento solamente a questa categoria.

2 Opzioni Call e Put

La principale distinzione che si può operare nelle opzioni è quella tra *call* e *put*. Le prime conferiscono all'acquirente la facoltà di acquistare il sottostante allo strike price a scadenza; al contrario, le seconde consentono di venderlo. Pertanto, le call si acquistano quando si hanno aspettative rialziste sul sottostante che, se a scadenza supera il valore dello strike price, potrà essere acquistato al prezzo di esercizio e venduto a prezzo di mercato, ottenendo un profitto. Al contrario, le opzioni put si acquistano quando si hanno aspettative ribassiste sul sottostante che, se a scadenza scenderà sotto il valore dello strike price, potrà essere acquistato a prezzo di mercato e venduto a prezzo di esercizio, ottenendo un profitto. La forza delle opzioni risiede nel fatto che in caso di errate previsioni, il contratto potrà essere semplicemente lasciato scadere, per cui l'unica perdita sarà pari al pagamento del premio.

Dato che tra le fattispecie analizzate rientra anche l'opzione con sottostante futures è opportuno chiarire brevemente di che tipo di strumento si tratta. Il futures è uno strumento derivato che, contrariamente alle opzioni, obbliga l'acquirente ad acquistare il sottostante a scadenza e il venditore a venderlo ad un prezzo prestabilito. Si intuisce che, se la previsione risulta corretta, il futures presenta maggiori possibilità di guadagno, poiché non si paga il premio; ma al contrario, se risulta sbagliata, presenta anche maggiori possibilità di incorrere in perdite.

Di seguito i grafici dei payoffs di un'opzione call e di un futures in posizione *long* con lo stesso strike price e quelli di un'opzione put e di un futures in posizione *short* con lo stesso strike price.



(a) Long Call vs. Long Future

(b) Long Put vs. Short Future

Figure 1: Payoff Opzioni Call e Put

Immaginiamo di essere interessati ad aprire una posizione long su un determinato sottostante X, di cui ci attendiamo un aumento del prezzo. Scegliamo quindi di acquistare un'opzione call europea per bloccare il prezzo di acquisto allo strike, che riteniamo possa essere superato dal valore del sottostante prima della scadenza. Se l'opzione costasse 1€ di premio ed avesse uno strike price di 15€, il payoff del nostro investimento, che dipende dal prezzo del sottostante nel momento di esercizio dell'opzione, sarebbe quello riportato nel primo grafico (in arancione). Si hanno dunque tre scenari a scadenza: il prezzo del sottostante è inferiore allo strike price (OTM), il prezzo del sottostante è pari allo strike price (ATM) o il prezzo del sottostante è superiore allo strike price (ITM). Si nota che il futures diventa profittevole a partire dal momento in cui il valore del sottostante a scadenza è di poco superiore allo strike price; mentre la call diventa profittevole solamente dopo aver compensato il valore del premio, al punto che il breakeven point nel caso della call è dato da strike price + premium. Di contro, se il prezzo del sottostante scende sotto il valore dello strike, la call permette di non essere esercitata e quindi di subire solamente una perdita pari al premio pagato, mentre il futures obbliga a subire l'intera perdita.

Immaginiamo di essere ora interessati ad aprire una posizione short su un determinato sottostante X, di cui ci aspettiamo quindi un decremento del prezzo. Scegliamo quindi di acquistare un'opzione put europea per bloccare il prezzo di vendita al valore dello strike, che riteniamo possa essere oltrepassato a seguito di un decremento del valore del sottostante nel futuro prossimo. Se l'opzione costasse 1€ di premio ed avesse uno strike price di 15€ il payoff del nostro investimento sarebbe quello riportato nel secondo grafico (in arancione). In questo caso, più il prezzo dell'asset scende sotto al livello di 15€, più alto sarà il guadagno. Si nota dunque che il grafico relativo alla put è diametralmente opposto rispetto a quello della call, con la differenza che l'opzione put non ha guadagni illimitati come la call, dal momento che il prezzo del sottostante non può scendere sotto lo 0. Anche in questo caso, l'opzione put diventa profittevole solamente dopo aver compensato il costo del premio, per cui il punto di breakeven è dato da strike price – premium.

Per concludere con il paragrafo definitorio, un'opzione call si definisce *in the money* (ITM) se il prezzo corrente del sottostante al momento dell'acquisto dell'opzione è maggiore dello strike price della stessa, *at the money* (ATM) se il prezzo coincide con lo strike e *out of the money* (OTM) se il prezzo corrente è minore dello strike. Per l'opzione put vale l'opposto, ITM se il prezzo è minore dello strike, ATM se il prezzo coincide con lo strike e OTM se il prezzo è maggiore dello strike.

3 Pricing delle Opzioni con la Formula di Black-Scholes

Il modello più famoso per il pricing di opzioni europee è quello di Black-Scholes, di cui riportiamo la formula per il premio di call e put con sottostante azioni che non pagano dividendi. La formula, che ci limiteremo a fornire, proviene dalla risoluzione di un'equazione differenziale, derivata assumendo che i mercati siano efficienti e che non ci sia opportunità di arbitraggio.

<table>
<tr><th>Call</th><th>Put</th></tr>
<tr><td>$$C(S,t) = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$
dove:
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$</td><td>$$P(S,t) = Ke^{-rT}N(-d_1) - S(0)N(-d_2)$$
dove:
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
• $C(S,t)$ è il prezzo dell'opzione call al tempo t
• $P(S,t)$ è il prezzo dell'opzione put al tempo t
• $S(0)$ è il prezzo corrente dell'asset sottostante
• K è il prezzo di esercizio dell'opzione
• r è il tasso d'interesse senza rischio
• σ è la volatilità (o *standard deviation*) dell'asset sottostante
• T è il tempo alla scadenza dell'opzione (in anni)
• $N(d)$ è la funzione di distribuzione cumulativa della variabile normale standard per d, rappresenta indirettamente la probabilità di esercizio dell'opzione
</td></tr>
</table>

Table 1: Descrizione delle variabili dell'opzione call e put.

Essenzialmente, le formule consistono nella semplice sottrazione di due membri ed esprimono il valore attuale del profitto atteso dal contratto. Infatti, $S(0)N(d_1)$ rappresenta il valore attuale del sottostante pesato per la probabilità che l'opzione finisca in-the-money, mentre $Ke^{-rT}N(d_2)$ è il valore attuale dello strike price pesato per la probabilità che l'opzione sia esercitabile e viene attualizzato per riflettere il valore attuale di un pagamento futuro. Nel caso della call (put), il primo (secondo) addendo, a differenza del secondo (primo), non è scontato per un fattore di attualizzazione. Questo è giustificato dal fatto che $S(0)$ è già un valore corrente e $N(d_1)$, modellando la probabilità che l'opzione sia esercitabile con profitto in futuro incorpora già implicitamente i fattori temporali.

Dunque, nel caso della Call, $S(0)N(d_1)$ è la potenziale entrata di cassa, ovvero il prezzo a cui potrò vendere il sottostante; mentre $Ke^{-rT}N(d_2)$ è la potenziale uscita di cassa, ovvero ciò che dovrò pagare per acquistare il sottostante. Al contrario, nel caso della Put, $Ke^{-rT}N(d_2)$ è il prezzo a cui potrò vendere il sottostante; quindi, la potenziale entrata di cassa; mentre $S(0)N(d_1)$ è la potenziale uscita di cassa, poiché rappresenta il prezzo atteso a cui dovrò acquistare il sottostante. Fondamentalmente, questo è il motivo per cui i due membri sono invertiti nel caso di acquisto di una Call piuttosto che una Put. A questo punto, cerchiamo di fornire l'intuizione finanziaria del perché il premio delle opzioni dipenda da queste variabili.

- K: il valore dello strike price ha una relazione negativa con il prezzo della call, mentre ha una relazione positiva con il prezzo della put. La motivazione è ovvia, nel caso della call lo strike rappresenta il prezzo potenziale al quale vogliamo acquistare il sottostante: maggiore lo strike, minore il profitto che riusciremo a perseguire a parità di prezzo di sottostante a scadenza, per cui minore la disponibilità a pagare per l'opzione. Al contrario, nel caso della put lo strike rappresenta il prezzo potenziale al quale vogliamo vendere il sottostante: maggiore lo strike, maggiore anche il profitto potenziale a parità di prezzo del sottostante a scadenza, per cui maggiore disponibilità a pagare per l'opzione.

- σ: per comprendere come la volatilità impatta sul prezzo delle opzioni dobbiamo ricordarci il precedente grafico dei payoff. Non essendo simmetrico, presenta una perdita massima data dal prezzo del premio e profitti potenzialmente illimitati per la call o comunque molto elevati per la put. Questo significa che la volatilità del sottostante va a favore dell'acquirente delle opzioni, dal momento che la grande aleatorietà del sottostante può portare a ingenti guadagni nel caso in cui si intuisca la direzione della volatilità, mentre se si sbaglia la perdita rimane comunque limitata al premio. In sintesi, alta volatilità significa più alta probabilità che il prezzo si discosti dallo strike, quindi un più elevato valore atteso.

- T: seguendo lo stesso ragionamento di sopra, l'acquirente ha interesse che il prezzo del sottostante si discosti il più possibile dallo strike price, perché in questo modo può guadagnare molto ma le perdite sono sempre limitate. Più è lunga la scadenza dell'opzione, più si ha probabilità che il valore del sottostante si discosti dallo strike, quindi maggiore il valore atteso del contratto. Dal grafico si nota inoltre che il valore della put si incrementa meno rapidamente all'aumentare del tempo a scadenza. Questo avviene perché, più aumenta T, più diminuisce il valore attuale dello strike (K), ovvero la potenziale entrata di cassa per il detentore della put.

- $S(0)$: il prezzo corrente del sottostante ha una relazione positiva con il prezzo della call e una relazione negativa con quella della put e l'intuizione è identica a quella dello strike price. Nel caso della call, a parità di strike price, un prezzo del sottostante più elevato si traduce in una probabilità maggiore di riuscire ad esercitare l'opzione generando profitti. Al contrario, nella put, un valore più elevato del prezzo corrente del sottostante, a parità di strike price, si traduce in una minore probabilità di profitto.

- r: il prezzo della call ha una relazione positiva con il tasso di interesse risk-free, mentre il prezzo della put ha una relazione negativa. L'intuizione sta nel fatto che lo strike price viene attualizzato usando il tasso risk-free e nella call rappresenta la potenziale uscita di cassa, mentre nella put la potenziale entrata di cassa. Quindi, all'aumentare del tasso risk-free, diminuisce il valore attuale che dovrei pagare nel caso della call e il valore attuale di ciò che dovrei incassare nel caso della put.

- $N(d)$: la distribuzione normale standard si adatta bene all'ipotesi che i rendimenti degli asset siano log-normali, un'assunzione comune nei mercati finanziari. La centralità della distribuzione normale in statistica e il suo ruolo nel teorema del limite centrale, che suggerisce come diverse variabili indipendenti sommate tendano verso una distribuzione normale, ne fanno una scelta logica. Inoltre, la sua trattabilità matematica e l'ampia accettazione storica nel campo del pricing delle opzioni rafforzano ulteriormente la sua presenza in questi modelli, nonostante le limitazioni e l'esistenza di modelli alternativi per situazioni più complesse.

3.1 Formula di Black-Scholes per opzioni su azioni che non pagano dividendi

Il payoff di una opzione call Europea è dato dalla differenza tra il prezzo di mercato $S(T)$ a cui posso vendere il sottostante e lo strike price K a cui posso acquistarlo a scadenza, con $S(T)$ pari al prezzo futuro dell'asset sottostante alla data di scadenza:

$$c(S,t) = \max[S(T) - K, 0]$$

Necessariamente, al termine del contratto, l'opzione verrà esercitata se e solo se $S(T) > K$, e l'asset sottostante può essere venduto a $S(T)$ e acquistato a K, ottenendo una plusvalenza di $S(T) - K$.

La formula di Black-Scholes permette di calcolare il prezzo corrente dell'opzione utilizzando variabili note. Per esprimere gli addendi sopra riportati a valori correnti è necessario: per il primo addendo, individuare il prezzo corrente $S(0)$ e la probabilità $N(d_1)$ che il prezzo corrente assuma valore pari a $S(T)$ in T; per il secondo addendo, definire il fattore di sconto e^{-rT} che consente di esprimere a valori correnti lo strike price che verrà pagato in futuro e la probabilità $N(d_2)$ che il diritto di opzione venga esercitato in T. La formula Black-Scholes per una call è quindi:

$$c(S,t) = S(0)N(d_1) - e^{-rT}KN(d_2)$$

Contrariamente, il payoff di una opzione put Europea è dato dalla differenza tra lo strike price K a cui posso vendere il sottostante e il prezzo di mercato $S(T)$ a cui posso acquistarlo a scadenza visto che l'opzione put permette di vendere l'asset sottostante allo strike price K:

$$p(S,t) = \max[K - S(T), 0]$$

Per poter presentare la formula per le opzioni put bisogna prima introdurre il concetto di Put-Call Parity, ovvero un'assunzione che elimina la possibilità di effettuare arbitraggi tramite una call e una put sullo stesso sottostante. La condizione è la seguente:

$$c_t = p_t + S_t - Ke^{-rT} \quad \text{quindi} \quad p_t = c_t + Ke^{-rT} - S_t$$

La formula Black-Scholes per una opzione put sarà quindi:

$$p(S,t) = c(S,t) + e^{-rT}K - S(t)$$

Questa a sua volta può essere trasformata inserendo al suo interno la formula Black-Scholes per una opzione call, diventando così:

$$p(S,t) = S(0)N(d_1) - e^{-rT}KN(d_2) + e^{-rT}K - S(0) = e^{-rT}K(1 - N(d_2)) - S(0)(1 - N(d_1))$$

Vista la simmetria della distribuzione normale, sappiamo che una delle proprietà è:

$$N(-d) = (1 - N(d))$$

di conseguenza la formula finale di un'opzione put è:

$$p(S,t) = e^{-rT}KN(-d_2) - S(0)N(-d_1)$$

3.2 Formula di Black-Scholes per opzioni su azioni che pagano dividendi

Il modello di Black-Scholes opera sotto un presupposto o limitazione: l'asset sottostante all'opzione non eroga dividendi. Quando vengono incorporati i dividendi all'interno della formula, si passa al modello Black-Scholes-Merton, che tiene conto del fatto che le azioni che pagano dividendi riducono il loro prezzo ogni volta che un dividendo viene pagato, influenzando di conseguenza il valore delle opzioni. Considerando i dividendi, la condizione di Put-Call parity diventa:

$$c_t = p_t + S_t - D - Ke^{-rT} \quad \text{quindi} \quad p_t = c_t + Ke^{-rT} + D - S_t$$

La formula Black-Scholes per opzioni con sottostante azioni che pagano dividendi deve essere riformulata: investendo in opzioni non si ha il diritto ai dividendi; perciò, il dividendo contenuto all'interno del prezzo dell'azione deve essere scorporato. Matematicamente questo viene fatto attualizzando il valore al tempo t_0 del sottostante al tasso q, che rappresenta il tasso di rendimento annuo dei dividendi, espresso come frazione del prezzo dell'azione. Di conseguenza, avremo che la formula Black-Scholes-Merton per una opzione call sarà:

$$c(S,t) = S(0)e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Mentre per un'opzione put sarà:

$$p(S,t) = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)e^{-qT}N(-d_1)$$

Per tener conto dei dividendi, occorre anche ricalcolare d_1 come segue:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)e^{-qT}}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Da cui, applicando le proprietà dei logaritmi:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln S(0) - qT - \ln K + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln S(0) - \ln K + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \tag{1}$$

3.3 Formula di Black-Scholes per opzioni su futures

Per derivare la formula di pricing sui futures, si parte da quella analizzata per prezzare le opzioni senza dividendi (in quanto non sono previsti dai futures) e si sostituisce $S(0)$ con Fe^{-rT}, ovvero il prezzo di acquisto futuro del sottostante (prezzo a termine) attualizzato al tempo t_0. Indicando l'opzione call con $C(F,t)$ e con F il prezzo del futures, la formula diventa:

$$c(F,t) = Fe^{-rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Raccogliendo e^{-rT} abbiamo:

$$c(F,t) = e^{-rT}[FN(d_1) - KN(d_2)]$$

Analogamente si ottiene il prezzo della put:

$$p(F,t) = e^{-rT}[KN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

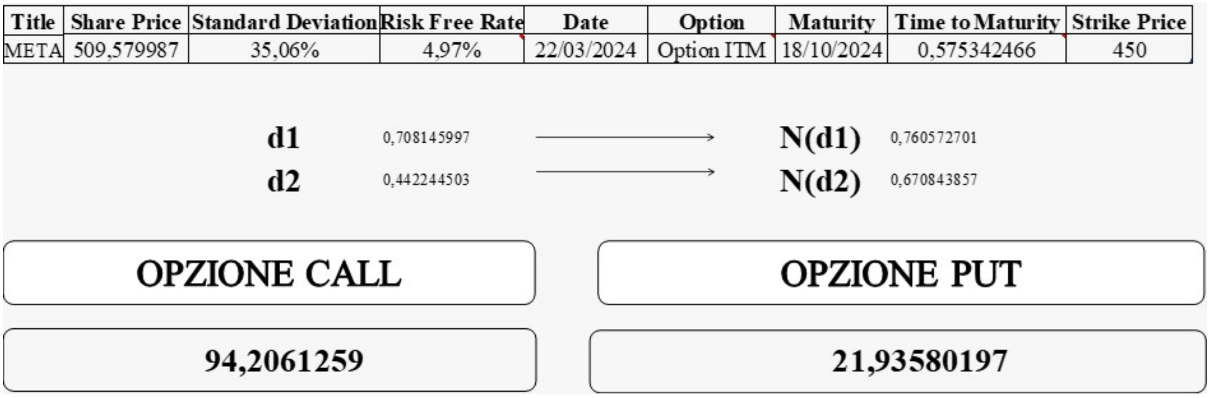
d_1 e d_2 vengono ricalcolati come segue:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

d_1 e d_2 vengono ricalcolati con la stessa sostituzione di sopra. Si noti che mancano q in quanto i dividendi non sono applicabili per i futures ed r che viene semplificato algebricamente.

4 Applicazioni

4.1 Implementazione su Excel



Title	Share Price	Standard Deviation	Risk Free Rate	Date	Option	Maturity	Time to Maturity	Strike Price
META	509,579987	35,06%	4,97%	22/03/2024	Option ITM	18/10/2024	0,575342466	450

Figure 2: Interfaccia Pricing su Excel

Su Excel non è difficile pervenire ad un output simile a quello proposto, tramite l'applicazione di poche formule built-in:

- `=STOCKHISTORY`: richiede il ticker dell'asset che si vuole analizzare e il periodo di analisi (start date e end date) e fornisce immediatamente lo storico dei prezzi di chiusura dell'asset, fondamentali per calcolare le performance giornaliere dell'asset.
- `=STDEV.S`: permette di calcolare la volatilità storica dell'asset a partire dalle performance giornaliere. Si tratta della formula per calcolare la deviazione standard di un campione (sample) di dati, leggermente diversa dalla formula per la deviazione standard di una popolazione (`=STDEV.P`)
- `=NORM.DIST`: permette di calcolare la probabilità cumulata di un determinato quantile, fornendo il valore del quantile, la media e la deviazione standard della distribuzione normale. Nel modello di Black-Scholes, la formula di calcolo dei quantili (d1 e d2) prevede già la standardizzazione, per cui media e deviazione standard della distribuzione sono rispettivamente 0 e 1.

Per il resto, è sufficiente applicare la formula di BS per avere un modello che in modo abbastanza automatico fornisce il prezzo teorico di opzioni call e put europee su azioni che non distribuiscono dividendi.

4.2 Implementazione su Python

In Python è necessario importare alcune librerie esterne che ci permetteranno di utilizzare funzioni e dati di cui avremo bisogno:

```python
from scipy.stats import norm
import numpy as np
import yfinance as yf
from datetime import datetime
```

- `norm` è la libreria che ci permette di calcolare la probabilità cumulata dei quantili di una distribuzione normale;
- `numpy` è una delle librerie più famose per Python che permette l'ottimizzazione dell'esecuzione delle principali operazioni matematiche o di algebra lineare;

- `yfinance` è una libreria che permette di scaricare dati finanziari direttamente da Yahoo Finance;
- `datetime` invece è utile per la gestione delle operazioni con le date.

Detto questo, è sufficiente definire le funzioni di call e put come segue:

```
def call(S, K, T, r, sigma, q=0):
    ''' Calcola il prezzo di un call con il metodo di Black-Scholes '''

    # calcolo dei parametri d1 e d2
    d1 = (np.log(S/K) + (r - q + sigma**2/2)*T) / (sigma*np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma*np.sqrt(T)

    # calcolo del prezzo di un call con il metodo di Black-Scholes
    return S*np.exp(-q*T)*norm.cdf(d1) - K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(d2)

def put(S, K, T, r, sigma, q=0):
    ''' Calcola il prezzo di una put con il metodo di Black-Scholes '''

    # calcolo dei parametri d1 e d2
    d1 = (np.log(S/K) + (r - q + sigma**2/2)*T) / (sigma*np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma*np.sqrt(T)

    # calcolo del prezzo di una put con il metodo di Black-Scholes
    return K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(-d2) - S*np.exp(-q*T)*norm.cdf(-d1)
```

A questo punto, definendo i parametri si possono ottenere i prezzi delle opzioni in pochi istanti:

```
S = 509.579987
sigma = 0.3506
r = 0.0497
T = (datetime(2024, 10, 18) - datetime(2024, 3, 22)).days / 365
K = 500

call(S, K, T, r, sigma)
put(S, K, T, r, sigma)
```

La formula di Black-Scholes non può essere analiticamente risolta per la volatilità; tuttavia, la potenza di calcolo di Python permette di calcolare in pochi secondi "per tentativi" (con un ciclo for) la volatilità implicita prezzata dal mercato, che può essere utile per l'implementazione di strategie con le opzioni di cui si discuterà nell'ultimo paragrafo.

```
def impliedVol_put(p, S, K, T, r, q=0, max_iter=1000, tol=1e-6):
    ''' Calcola l'implicit volatility di un'opzione put utilizzando il metodo di Newton-
    Raphson '''

    # Funzione per calcolare il prezzo dell'opzione put
    def PriceDifference(sigma):
        return put(S, K, T, r, sigma, q) - p

    # Derivata della funzione di Black-Scholes rispetto a sigma
    def vega(sigma):
        d1 = (np.log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
        return S * np.exp(-q * T) * norm.pdf(d1) * np.sqrt(T)

    # Implementazione del metodo di Newton-Raphson
    sigma_guess = 0.3  # Valore iniziale per la volatility
    for i in range(max_iter):
```

```
        price_diff = PriceDifference(sigma_guess)
        if abs(price_diff) < tol:
            return sigma_guess
        else:
            # Calcolo della nuova stima di volatility
            sigma_guess -= price_diff / vega(sigma_guess)

    # Se non converge, restituisci None
    return None
```

```
p = 14.3
S = 170.92
K = 170
T = (datetime(2024, 10, 18) - datetime.now()).days / 365
r = 0.05

impliedVol_call(p, S, K, T, r)
```

Per esempio, la volatilità di Apple nell'ultimo anno è stata all'incirca del 19%, mentre il mercato sta prezzando fino ad ottobre 2024 una volatilità annualizzata di circa il 23%. In questo modo un individuo, se si aspettasse che la volatilità di Apple rimanga in linea con quella dell'ultimo anno, potrebbe arrivare a concludere che l'opzione call in questione sia eccessivamente costosa perché sconta una volatilità troppo elevata e potrebbe mettere in pratica una short straddle o short strangle.

5 Strategie con opzioni

Le opzioni possono essere utilizzate per fini di copertura, per fini speculativi, o per sfruttare arbitraggi. Ai fini del report si analizzeranno solamente le strategie relativi ai primi due scopi.

5.1 Strategie di copertura

Quando si ha una posizione aperta su un asset, acquistando o vendendo opzioni è possibile creare una nuova posizione sintetica, ovvero è possibile imitare il profilo dei payoff di un'opzione senza doverla acquistare o vendere. Ipotizziamo di avere una posizione "long" su un asset, ma abbiamo timore che il prezzo possa diminuire, acquistando un'opzione put è possibile creare una posizione sintetica long call che ci protegge da un ribasso del prezzo del sottostante.

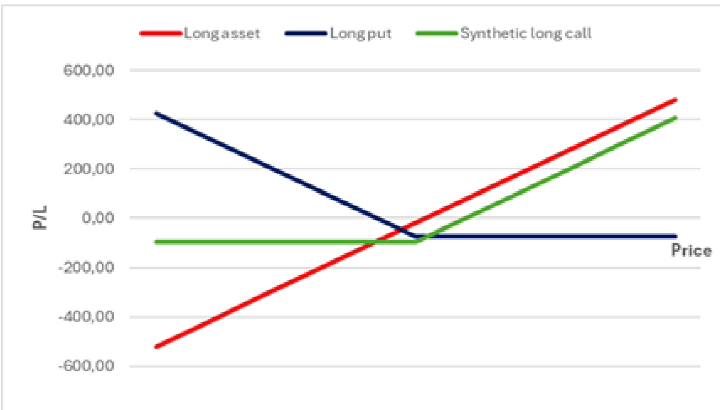


Figure 3: Payoff della posizione sintetica long call.

A seconda della combinazione tra il verso dell'esposizione sull'asset (long o short) e l'operazione effettuata operando con opzioni si possono ottenere diversi risultati in termini di posizione sintetica:

- Long asset + long put = Synthetic long call
- Short asset + long call = Synthetic long put
- Long asset + short call = Synthetic short put
- Short asset + short put = Synthetic short call

Un altro modo per coprire una posizione long è quello di usare una strategia Collar, ossia acquistare una put e allo stesso tempo vendere delle opzioni call in modo tale da accumulare i premi incassati per poter pagare il premio della put.

(a) Costruzione del Collar

(b) Collar per Hedging

Figure 4: Strategie di copertura con Collar.

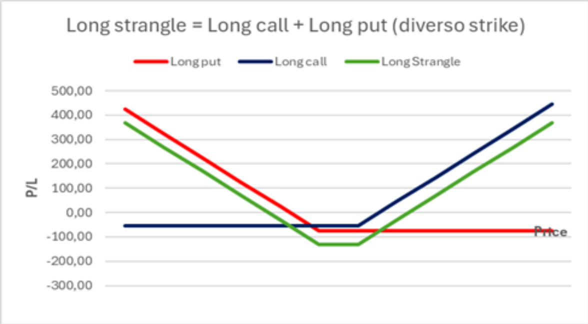
In questo modo il payoff finale consente di creare una *hedged position* che limita sia profitti che perdite. I profitti perché, dato un aumento del prezzo del sottostante, il profitto sulla posizione long è controbilanciato dalla perdita sulla posizione short call, siccome l'investitore sarà obbligato a vendere allo strike (che sarà inferiore al prezzo di mercato). Le perdite invece perché, se il prezzo dell'asset si riduce l'investitore ha l'opportunità di esercitare la put compensando così la perdita sulla posizione long con il profitto ottenuto dall'opzione acquistata ed esercitata. Peraltro, è anche possibile costruire una *Inverse Collar* per coprire una posizione short acquistando una opzione call e vendendo delle opzioni put.

Quando non si ha un'opinione riguardante la direzione del sottostante, ma si pensa che l'implied volatility prezzata dal mercato sia errata, si possono costruire delle strategie con le opzioni, definite straddle e strangle.

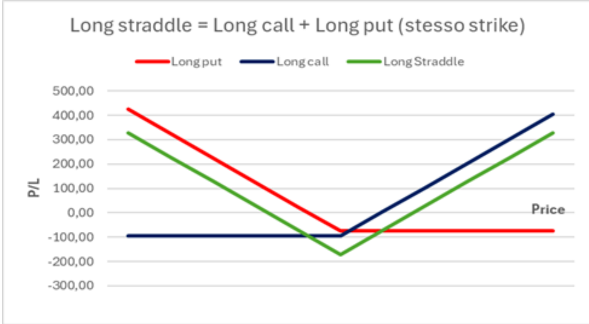
5.2 Strategie speculative

Quando non si ha un'opinione riguardante la direzione del sottostante, ma si pensa che l'implied volatility prezzata dal mercato sia errata, si possono costruire delle strategie con le opzioni, definite straddle e strangle.

Se ci si aspetta una volatilità maggiore rispetto a quella prezzata dal mercato, si può optare per la strategia long straddle o long strangle. Come si nota, entrambe le strategie sono profittevoli quando il prezzo del sottostante si discosta molto dal prezzo iniziale; quindi, quando la realized volatility a scadenza è alta. La differenza tra le due è che la strangle, utilizzando strike diversi, permette di limitare le perdite massime, ma anche gli eventuali profitti.



(a) Long Strangle

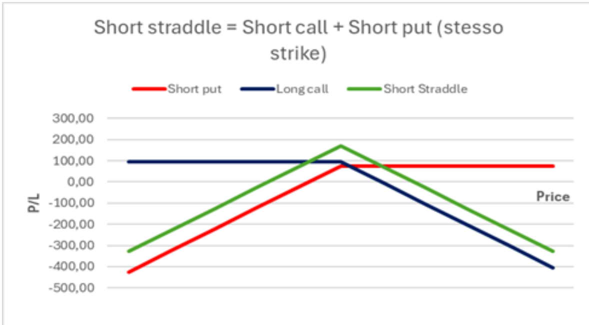


(b) Long Straddle

Figure 5: Strategie di Long Strangle/Straddle

Se invece, ci si aspetta una volatilità minore rispetto a quella prezzata dal mercato, si può optare per la strategia short straddle o short strangle. In questo caso, le strategie sono profittevoli quando il prezzo del sottostante si discosta poco dal prezzo iniziale, ovvero quando la realized volatility risulta bassa, in modo che si riesca a guadagnare incassando i premi per la vendita delle opzioni.

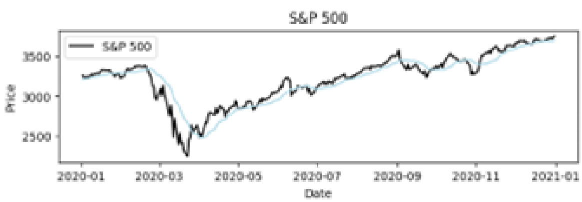
(a) Short Strangle



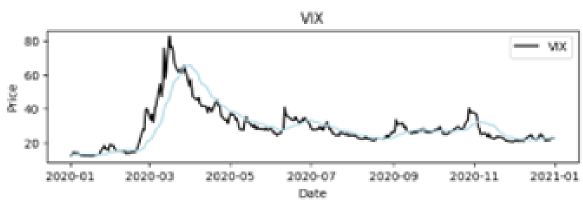
(b) Short Straddle

Figure 6: Strategie di Short Strangle/Straddle

5.3 Volatility effects



(a) S&P500



(b) VIX

Figure 7: Relazione tra S&P500 e VIX.

Come si può notare graficamente, vi è una forte relazione negativa tra l'S&P500 e il VIX (indice di volatilità sulle azioni), al punto che il coefficiente di correlazione tra i due indici negli ultimi vent'anni è stato del -79%. Per questo motivo, è possibile fare *hedging* sulle posizioni nel mercato azionario acquistando opzioni sul VIX. Per esempio, possedendo un ETF sull'S&P500 e temendo un ribasso del mercato, è possibile acquistare call sul VIX e sfruttare la relazione inversa. Il vantaggio di questa strategia è l'esplosività del VIX in alcune situazioni, mentre lo svantaggio è che questa relazione inversa non è poi sempre così stabile. Infatti, nel 2020 la strategia avrebbe funzionato molto bene, con l'S&P500 che ha perso il 23% e il VIX che ha avuto uno *spike* del 440%; mentre nel 2022 l'S&P500 da gennaio a ottobre ha avuto un drawdown del 22% e il VIX non ha fornito un'*hedging* consistente.

Call/Put	**Rise in S&P500 / Fall in IV**
Price Calls	Increase/Decrease
Price Puts	Decrease/Decrease

Table 2: Risposta dei prezzi delle opzioni a variazioni di S&P500 e IV

Tenendo conto della strutturale relazione inversa tra l'equity e il VIX, vale la pena concludere analizzando nuovamente come reagiscono i prezzi delle opzioni al variare del prezzo del sottostante $S(0)$. Bisogna considerare due effetti, l'impatto del sottostante e la corrispondente reazione della volatilità. Nel caso delle put questi due effetti operano nella stessa direzione, mentre nel caso delle call operano in direzioni opposte, per cui l'impatto sul prezzo è incerto. Ad esempio, analizzando una call, l'andamento positivo del mercato aumenta il prezzo dell'azione, e quindi il valore di un'opzione call; tuttavia, la diminuzione della volatilità riduce la mia possibilità di profitto, in quanto il massimo che posso perdere con volatilità alta è il premium, mentre perdo la possibilità di ottenere profitti maggiori. Al contrario, un'opzione put vedrebbe diminuire il suo valore sia per l'aumento di $S(0)$, sia a causa della riduzione della volatilità.

6 Bibliografia

- Hull, J. C. (2022). Option, futures and other derivatives. Pearson.
- Joshi, M. S. (2003). The concepts and practice of mathematical finance. Cambridge University Press.
- Natenberg, S. (c1988). Option volatility and pricing strategies: advanced trading techniques for professionals. Probus.
- Pascucci, A. e Runggaldier W. J. (c2009). Finanza matematica : teoria e problemi per modelli multiperiodali. Springer.

Questo report è stato creato dal Team di Equities della divisione di Portfolio Management dello Starting Finance Club Bocconi.