Starting Finance Club Bocconi - Portfolio Management Division

Caplets, Floorlets e Swaptions: Definizioni e Pricing

Supervisors

Angelo Truono, Mattia Canta

Team leader

Alessandro Monti

Team members

Simone Viero, Luca Mozzo, Kai Lin Ying, Enrico Bronca, Giovanni Pozzobon

April 2024

Indice

1 Introduzione

Questo documento analizza in dettaglio le opzioni sui tassi di interesse, concentrandosi su caplets, floorlets e swaptions, con le rispettive strategie di pricing. Questi strumenti finanziari sono fondamentali per gli investitori che cercano di gestire il rischio e ottimizzare i rendimenti in un ambiente economico in continua evoluzione.

I caplets e i floorlets forniscono ulteriori opzioni per proteggersi da variazioni impreviste dei tassi di interesse, offrendo agli investitori la possibilità di limitare le perdite in condizioni di mercato avverse.

Le swaptions aggiungono un ulteriore livello di flessibilità, consentendo agli investitori di acquisire il diritto, ma non l'obbligo, di entrare in un interest rate swap a condizioni predeterminate.

L'uso di questi strumenti permette strategie di copertura efficaci e speculative basate su previsioni dell'andamento futuro dei tassi di interesse. La combinazione di caplets, floorlets e swaptions offre una gamma completa di opzioni per affrontare scenari di mercato complessi, consentendo agli investitori di navigare con maggiore sicurezza e adattabilità.

2 Caplets e Floorlets

I caplets e i floorlets sono strumenti finanziari ideati per proteggere i detentori di una posizione a tasso variabile dalle oscillazioni dei tassi di interesse.

I caplets, previo pagamento immediato o periodico del premio, permettono all'acquirente, ovvero il detentore dell'opzione, di ricevere, a una determinata scadenza prefissata, dal venditore dell'opzione una somma di denaro pari alla differenza, se positiva, fra un tasso variabile di riferimento prescelto (come l'Euribor) e un tasso fisso predeterminato (*strike rate*). Per calcolare gli importi dovuti a un eventuale differenziale tra i tassi, si specifica un ammontare di capitale nozionale. Non vi è alcun pagamento se il tasso di riferimento è inferiore allo *strike rate*.

Considerando tassi annuali, l'importo dovuto per ogni periodo si calcola con la seguente formula:

$$(\text{reference rate} - \text{strike rate}) \times \text{capitale nozionale} \times (\text{giorni}/360)$$

I caplets proteggono l'acquirente dai rialzi dei tassi, beneficiando dei ribassi.

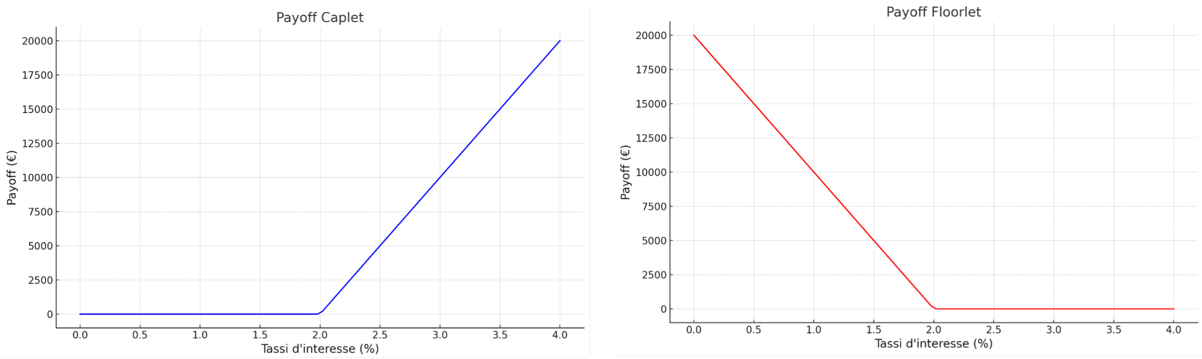
I floorlets, previo pagamento di un premio, permettono all'acquirente di ricevere dal venditore una somma di denaro pari all'eventuale differenza fra il tasso minimo concordato e il valore di mercato di un parametro di riferimento moltiplicato per il capitale nozionale. Non c'è pagamento se il tasso di riferimento è superiore allo *strike rate*. A differenza dei caplets, proteggono l'acquirente dai ribassi dei tassi di interesse.

Per calcolare l'importo dovuto per ogni periodo nei floorlets, la formula è simile a quella dei caplets:

$$(\text{strike rate} - \text{reference rate}) \times \text{capitale nozionale} \times (\text{giorni}/360)$$

Esempio: un caplet con un nozionale di 1,000,000 euro, uno strike rate del 2%, e un riferimento al tasso di interesse annuo del 3%, genererebbe un payoff di 10,000 euro. Se il tasso fosse invece dell'1%, il payoff sarebbe nullo. D'altro canto, un floorlet con le stesse caratteristiche, ma con scenari inversi, genererebbe un payoff di 10,000 euro se il tasso di riferimento fosse dell'1% e sarebbe nullo se fosse del 3%.

Le seguenti figure mostrano i payoff del caplet e del floorlet.



(a) Payoff del caplet (b) Payoff del floorlet

Figure 1: Payoff caplet e floorlet

3 Pricing di Caplets e Floorlets

3.1 Pricing con Black Model

Il Modello Black, noto come modello di Black-76 per le opzioni sui tassi d'interesse, presuppone una distribuzione lognormale dei tassi futuri. Derivato dal più noto modello Black-Scholes, utilizzato per le opzioni su azioni, il modello Black-76 adatta la struttura di Black-Scholes alle caratteristiche specifiche delle opzioni sui tassi di interesse. Quest'ultimo infatti, teorizzato nel 1973, era pensato per le opzioni call e put, basandosi sull'assunzione di tassi di interesse costanti. Black-76, sviluppato per adattarsi alla fluttuazione dei tassi di interesse, include i tassi come variabili, integrati direttamente nella seguente formula per il calcolo del prezzo del caplet.

La distribuzione lognormale utilizzata nel modello Black è mostrata nella figura seguente:

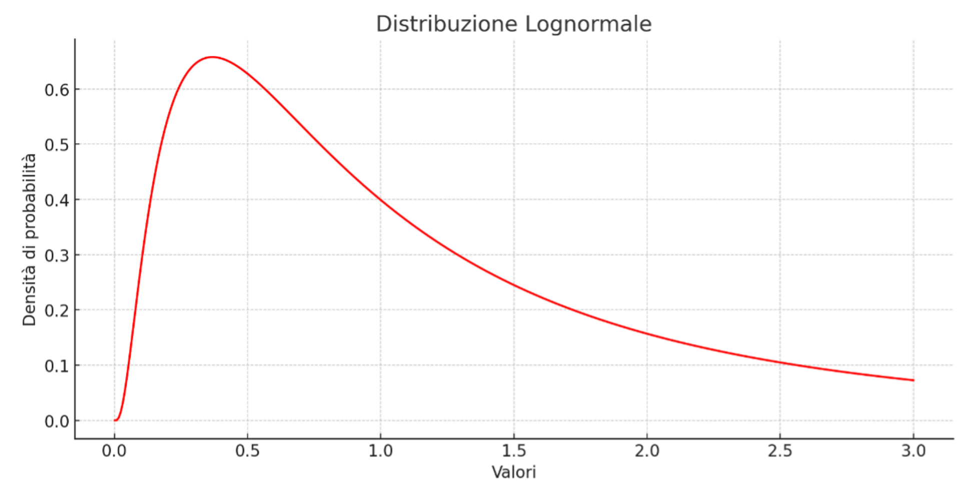


Figure 2: Distribuzione lognormale per il modello di Black

La formula per la valutazione di un caplet è la seguente:

$$\text{caplet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times (F(t, T_i, T_{i+1}) \times N(d_1) - L_x \times N(d_2)) \times \alpha_{i,i+1} \tag{1}$$

con:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t,T_i,T_{i+1})}{L_x}\right) + \frac{1}{2} \times V(t,T_i)}{\sqrt{V(t,T_i)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{V(t,T_i)}$$

dove:

- t è la data di partenza dell'opzione.
- T_i è il momento in cui si rileva il valore del tasso di riferimento.
- T_{i+1} è la data del payoff finale dell'opzione.
- $\alpha_{i,i+1}$ è un coefficiente che rappresenta la ponderazione del tasso d'interesse per il periodo tra T_i e T_{i+1}. Viene utilizzato per calcolare l'accumulo di interessi nel periodo specificato.
- $F(t,T_i,T_{i+1})$ è il tasso forward LIBOR tra i tempi T_i e T_{i+1}, osservato al tempo t.
- L_x è lo strike rate.
- $V(t,T_i)$ è la varianza del tasso di interesse tra t e T_i.

La varianza è calcolata come:

$$V(t,T_i) = \sigma^2 \times (T_i - t)$$

Le funzioni di distribuzione cumulativa normale, $N(d_1)$ e $N(d_2)$, sono calcolate rispettivamente per i valori d_1 e d_2. La formula per queste funzioni è:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Passando all'effettivo calcolo del prezzo del caplet, all'interno della parentesi si trova la differenza fra il prodotto tra il tasso forward $F(t,T_i,T_{i+1})$ e la funzione $N(d_1)$, e il prodotto tra lo strike rate L_x e la funzione $N(d_2)$.

Questa differenza è ulteriormente moltiplicata per $P(t,T_{i+1})$, il fattore di sconto che consente di attualizzare al tempo t il valore del caplet dal tempo T_{i+1}.

Il risultato della formula rappresenta il futuro valore del tasso ponderato per la probabilità di superare lo strike rate meno il tasso strike ponderato per la probabilità di superare quel tasso. Il tutto è attualizzato con la correzione dei tassi, con riferimento alla scadenza temporale in cui viene effettuato il pagamento.

Infine, è ulteriormente moltiplicato per il fattore di accrescimento $\alpha_{i,i+1}$, che corrisponde al frazionamento dell'anno tra T_i e T_{i+1}, o in altri termini, alla base temporale per il calcolo degli interessi. Il pagamento, infatti, non è effettuato necessariamente con una scadenza annuale, quindi $\alpha_{i,i+1}$ è il coefficiente che corregge il tasso annuale in base all'orizzonte temporale considerato.

Il risultato della formula corrisponde al futuro valore del tasso ponderato per la probabilità di superare lo strike meno il tasso strike ponderato per la probabilità di superarlo, tutto attualizzato con la correzione dei tassi rispetto alla scadenza temporale del pagamento. Questo rappresenta il payoff dell'opzione, ponderato per la probabilità di essere "in the money", attualizzato dal fattore di sconto.

Il calcolo del floorlet è molto simile:

$$\text{floorlet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times (L_x \times N(-d_2) - F(t, T_i, T_{i+1}) \times N(-d_1)) \times \alpha_{i,i+1} \tag{2}$$

Questa formula si deriva partendo da quella del caplet attraverso i seguenti passaggi:

$$\text{caplet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times (F(t, T_i, T_{i+1}) \times N(d_1) - L_x \times N(d_2)) \times \alpha_{i,i+1}$$

per l'uguaglianza tra opzione call e put (put-call parity) otteniamo:

$$\text{caplet}(t) - \text{floorlet}(t) = F(t, T_i, T_{i+1}) \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} - L_x \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1}$$

e quindi:

$$\text{floorlet}(t) = \text{caplet}(t) + L_x \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} - F(t, T_i, T_{i+1}) \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1}$$

Sostituendo caplet(t):

$$\text{floorlet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times (F(t, T_i, T_{i+1}) \times N(d_1)) \times \alpha_{i,i+1}$$
$$- \text{L}_x \times N(d_2) \times \alpha_{i,i+1} + L_x \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} - F(t, T_i, T_{i+1}) \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1}$$

raggruppando:

$$\text{floorlet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} \times L_x \times (1 - N(d_2)) - F(t, T_i, T_{i+1}) \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} \times (-N(d_1) + 1)$$

e riscrivendo $1 - N(x)$:

$$1 - N(x) = N(-x)$$

allora otteniamo:

$$\text{floorlet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} \times L_x \times N(-d_2) - F(t, T_i, T_{i+1}) \times P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1} \times N(-d_1)$$

Raccogliendo infine $P(t, T_{i+1}) \times \alpha_{i,i+1}$:

$$\text{floorlet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times (L_x \times N(-d_2) - F(t, T_i, T_{i+1}) \times N(-d_1)) \times \alpha_{i,i+1}$$

Così è ottenuta la formula per il calcolo del prezzo del floorlet.

Il modello di Black è stato successivamente perfezionato con il modello Displaced Black, che consente di considerare anche valori negativi dei tassi di interesse, ipotesi invece non presa in considerazione dal modello di Black.

3.2 Pricing con Bachelier Model

Il modello di Bachelier, sviluppato nel 1900, è uno dei primi modelli matematici per la valutazione delle opzioni europee. Si basa sull'assunzione che i prezzi degli asset finanziari, o in questo caso dei tassi di interesse, seguano un movimento browniano geometrico, un processo stocastico con incrementi indipendenti e distribuiti normalmente. In parole semplici, i cambiamenti di prezzo sono assunti come casuali e indipendenti.

A differenza del modello di Black, Bachelier presume che i movimenti dei prezzi o dei tassi di interesse seguano una distribuzione normale, che consente valori negativi.

La distribuzione normale utilizzata nel modello Bachelier è mostrata nella figura seguente:

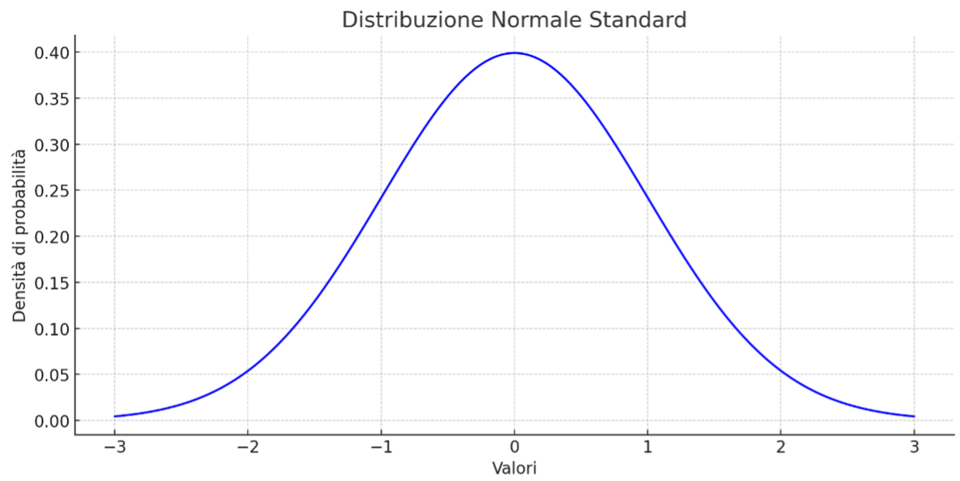


Figure 3: Distribuzione normale per il modello di Bachelier

Tuttavia, ciò porta a un problema poiché la distribuzione normale standard include valori di tassi estremamente negativi, che sono inverosimili in finanza. Inoltre, la volatilità costante nel tempo, utilizzata per semplificare l'analisi matematica, non riflette con precisione la realtà dei mercati.

Un'altra limitazione è che, basandosi su una distribuzione normale, il modello di Bachelier tende a sovrastimare i casi estremi, portando a una sottostima del valore delle opzioni. In confronto, il modello di Black-Scholes, che utilizza una distribuzione lognormale, tende a sovrastimare i prezzi delle opzioni.

Per le sue caratteristiche, l'uso del modello di Bachelier si adatta alla valutazione di asset con una volatilità relativamente bassa o di opzioni con scadenze brevi. Tuttavia, per opzioni che presentano significativa asimmetria o curtosi, sono necessari modelli alternativi. Le assunzioni del modello permettono di derivare una formula relativamente semplice per calcolare il prezzo di un caplet al tempo t.

Il prezzo del caplet corrisponde al valore atteso dei pagamenti a scadenza scontati a un tasso risk-free tramite il fattore di attualizzazione $P(t, T_{i+1})$, tenendo conto anche dell'effetto della volatilità sul prezzo.

$$\text{caplet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times \Big((F(t, T_i, T_{i+1}) - L_x) \times N(d_1) + \sqrt{V(t, T_i)} \times n(d_1) \Big) \times \alpha_{i,i+1} \tag{3}$$

con:

$$d_1 = \frac{F(t, T_i, T_{i+1}) - L_x}{\sqrt{V(t, T_i)}}$$

dove:

- $\alpha_{i,i+1}$ è un coefficiente che rappresenta la ponderazione del tasso d'interesse per il periodo tra T_i e T_{i+1}. Viene utilizzato per calcolare l'accumulo di interessi nel periodo specificato.
- $P(t, T_{i+1})$ è il fattore di sconto che riporta il valore futuro del pagamento del caplet al tempo presente t, consentendo di calcolare il valore attualizzato del caplet al tempo T_{i+1}.
- $(F(t, T_i, T_{i+1}) - L_x) \times N(d_1)$ rappresenta il payoff atteso del caplet. La differenza tra il tasso forward $F(t, T_i, T_{i+1})$ e il tasso strike L_x determina se l'opzione è "in-the-money" o "out-of-the-money". Questo valore viene moltiplicato per $N(d_1)$, la funzione di distribuzione cumulativa normale che indica la probabilità che l'opzione sia "in-the-money".

- A differenza del modello di Black, il modello considerato include anche $n(d_1)$, la funzione di densità di probabilità della distribuzione normale standardizzata valutata in d_1.

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

  La funzione di densità di probabilità mostra l'altezza della curva della distribuzione normale in un dato punto d_1, indicando la probabilità istantanea di osservare un certo valore in una distribuzione continua.

- Moltiplicando $n(d_1)$ per la volatilità $\sqrt{V(t, T_i)}$, si tiene conto che il payoff del caplet è influenzato dalle fluttuazioni dei tassi di interesse attorno al punto d_1 durante il periodo fino a T_{i+1}.

La formula di pricing del floorlet viene ricavata come prima tramite la put-call parity ed è la seguente:

$$\text{floorlet}(t) = P(t, T_{i+1}) \times \Big((L_x - F(t, T_i, T_{i+1})) \times N(-d_1) + \sqrt{V(t, T_i)} \times n(-d_1) \Big) \times \alpha_{i,i+1} \tag{4}$$

Nel caso dei floorlets, il possessore ha il diritto di ricevere un pagamento se il tasso di interesse forward $F(t, T_i, T_{i+1})$ è inferiore al tasso strike L_x. Il segno negativo davanti a $-d_1$ indica che la probabilità che il floorlet sia "in-the-money" aumenta quando il tasso di interesse è inferiore al tasso strike. Si considera quindi una distribuzione normale standard invertita.

3.3 Pricing con Displaced Black Model

Questa variante del modello di Black è stata sviluppata per funzionare anche con tassi d'interesse negativi, mantenendo il vantaggio della distribuzione lognormale per rappresentare l'andamento dei tassi futuri. In particolare, per adattare il modello ai tassi negativi o a contesti di mercato diversi, si utilizza un parametro di spostamento che permette di traslare la distribuzione lognormale verso destra o verso sinistra, a seconda dello scenario. Questo consente di affrontare situazioni come quella dei tassi negativi.

La distribuzione lognormale shiftata utilizzata nel modello Displaced Black è mostrata nella figura seguente:

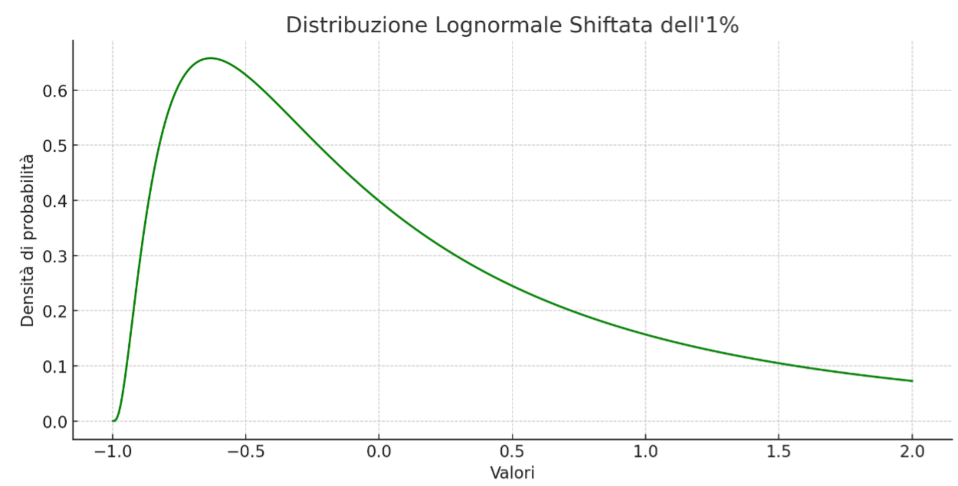


Figure 4: Distribuzione normale per il modello di Bachelier

Questo modello supera sia il problema principale del modello di Black, che non era adatto a situazioni di tassi negativi, sia il problema del modello di Bachelier, che assumeva una distribuzione normale anziché lognormale. Inoltre, anche in caso di tassi positivi, questo modello può essere più adatto rispetto al modello di Black tradizionale perché permette di considerare distribuzioni diverse tramite traslazioni della curva, tenendo conto delle differenti situazioni dei tassi di interesse nei vari stati o aree economiche.

La formula per prezzare i caplets è:

$$c(t) = P(t, T_{i+1}) \times ((F(t, T_i, T_{i+1}) + \delta) \times N(d_1) - (L_x + \delta) \times N(d_2)) \times \alpha_{i,i+1} \tag{5}$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t,T_i,T_{i+1})+\delta}{L_x+\delta}\right) + \frac{1}{2}V(t, T_i)}{\sqrt{V(t, T_i)}};$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{V(t, T_i)}$$

e

$$V(t, T_i) = \sigma^2 \times (T_i - t)$$

La differenza rispetto alla formula di Black è rappresentata dal parametro di spostamento del tasso di interesse δ. Con uno spostamento positivo, il modello Displaced Black può prezzare correttamente caplets e floorlets con tassi vicini allo 0 o persino inferiori.

Il motivo per cui questo parametro è necessario è legato al comportamento della funzione logaritmica quando presentata con valori molto piccoli. In particolare:

$$\lim_{x \to 0} \ln(0) = -\infty$$

Questa caratteristica rende necessario un parametro di spostamento per evitare risultati non definiti o numericamente instabili durante il calcolo. Uno spostamento positivo consente di garantire la stabilità del modello Displaced Black anche in presenza di tassi di interesse negativi o prossimi allo zero.

Per quanto riguarda i floorlets, la formula può essere ricavata adottando la stessa dimostrazione svolta per il modello di Black, ma considerando anche il parametro di spostamento, ottenendo così:

$$f(t) = P(t, T_{i+1}) \times ((L_x + \delta) \times N(-d_2) - (F(t, T_i, T_{i+1}) + \delta) \times N(-d_1)) \times \alpha_{i,i+1} \tag{6}$$

4 Caps e Floors: portafolgli di Caplets e Floorlets

I caplets e floorlets, generalmente, non sono usati singolarmente, ma in dei portafogli. Si stipulano contratti chiamati Interest Rate Caps e Interest Rate Floors, o più semplicemente Caps e Floors, che, attraverso molteplici caplets e floorlets con scadenze prefissate differenti, permettono di avere una protezione continua dalla variazione dei tassi, a differenza di un singolo caplet o floorlet che ha un periodo di riferimento unico.

Supponiamo, ad esempio, che l'emittente in t di un'obbligazione con scadenza fra 3 anni, con un nozionale di 1 milione di euro e cedole annuali variabili legate all'Euribor, decida di coprirsi dalla potenzialità di rialzo dei tassi di interesse. Acquista quindi un portafoglio di tre caplets con strike price del 3%, nozionale di 1 milione di euro, con scadenze rispettivamente dopo un anno, due anni e tre anni.

Anno	Euribor	Cedola	Flusso Caplet	Esercizio Caplet
1	2%	20,000	0	No
2	3.50%	35,000	5,000	Sì
3	4%	40,000	10,000	Sì

Il primo anno il tasso Euribor è minore del tasso strike, per cui il caplet non viene esercitato. Nei due anni successivi, invece, il tasso Euribor sale e il caplet permette di ricevere un flusso pari alla differenza tra il tasso variabile e il tasso strike, moltiplicata per il nozionale:

Anno 2: Caplet = 1,000,000 × (3.50% - 3%) = 5,000 euro
Anno 3: Caplet = 1,000,000 × (4% - 3%) = 10,000 euro

Ciò permette all'emittente di coprirsi dall'eventuale rialzo dei tassi di interesse, effettuando un pagamento netto massimo fisso e pari al 3% del nozionale.

5 Swaptions

Una swaption è un'opzione che conferisce al detentore il diritto, ma non l'obbligo, di entrare in un interest rate swap in futuro a condizioni predefinite. Le swaptions sono solitamente di tipo europeo e sono esercitabili solo alla scadenza. Meno diffuse sono le swaptions di tipo bermudiano, che sono invece esercitabili in una serie di date predeterminate.

Esistono due tipi principali di swaptions: le payer, che danno il diritto di diventare la parte pagante del tasso fisso in uno swap, e le receiver, che conferiscono il diritto di diventare la parte ricevente del tasso fisso. Le payer swaption verranno esercitate qualora, alla scadenza, il tasso variabile dell'IRS sottostante sia superiore al tasso fisso del medesimo strumento, mentre le receiver swaption verranno esercitate se il tasso variabile è inferiore al tasso fisso alla data di scadenza.

Supponiamo di considerare una payer swaption su un IRS di 10 anni con un nozionale di 1,000,000€ e un tasso di strike del 2%. Se, al momento dell'esercizio, i tassi di interesse correnti fossero al 3%, il detentore della swaption potrebbe scegliere di entrare nello swap come pagatore del tasso fisso, beneficiando di un tasso di interesse più alto sul mercato. La differenza tra il tasso di mercato e il tasso di strike, applicata al nozionale per la durata dello swap, determina il vantaggio economico di esercitare l'opzione. Se il tasso di interesse corrente fosse invece all'1%, non eserciterebbe l'opzione, poiché sarebbe più vantaggioso entrare in un nuovo IRS a tassi di mercato più bassi. Viceversa per una receiver swaption.

6 Pricing di Swaptions

6.1 Pricing con Black Model

Il modello di Black-76 si applica anche per il pricing delle swaptions. Come detto per caplets e floorlets, il modello presuppone una distribuzione lognormale per i tassi futuri, basata sull'assunto, successivamente messo in discussione dalla crisi del 2008, che i tassi di interesse non possano essere negativi. Il superamento di questa assunzione ha portato allo sviluppo di modelli più avanzati, come il Displaced Black, per il pricing delle opzioni su interest rate swap.

La formula seguente mostra il calcolo del prezzo di una payer swaption, uno strumento che conferisce al detentore il diritto, ma non l'obbligo, di entrare in un IRS come parte pagante della gamba fissa.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1,i} \times P(t, T_i) \times (S(t, T_0, T_n) \times N(d_1) - K \times N(d_2))$$

con

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S(t,T,T_n)}{K}\right) \pm \frac{1}{2} \times \sigma_s^2 \times (T-t)}{\sigma_s \times \sqrt{T-t}}$$

dove:

- n corrisponde al numero di flussi di cassa generati dall'IRS sottostante.
- $\alpha_{i,i+1}$ è un coefficiente che rappresenta la ponderazione del tasso d'interesse per il periodo tra T_i e T_{i+1}. Viene utilizzato per calcolare l'accumulo di interessi nel periodo specificato.
- $P(t, T_i)$ è il fattore di sconto che riporta il valore futuro al tempo T_i al suo valore presente al tempo t, utilizzato per scontare il valore atteso del payoff nel caso in cui l'opzione scada "in the money".
- $S(t, T_0, T_n)$ è il tasso di interesse atteso del sottostante all'istante t per uno swap che inizia in T_0 e termina in T_n, ovvero il tasso che renderebbe nullo, alla data attuale t, il valore netto attuale dello swap.
- K è il tasso di interesse strike della swaption.
- $N(d_1)$ e $N(d_2)$ sono rispettivamente i valori della funzione di distribuzione cumulativa normale per d_1 e d_2. Entrambi rappresentano la probabilità che la swaption scada "in the money", cioè che sia conveniente esercitarla alla scadenza. Tuttavia, $N(d_2)$ include anche una componente di attualizzazione dei flussi futuri derivanti dall'esercizio dell'opzione.
- d_1 e d_2 sono calcolati come il logaritmo del rapporto tra il tasso di interesse atteso del sottostante all'istante t e il tasso strike della swaption, rispettivamente aggiunto o sottratto per metà della varianza del tasso di interesse dell'IRS sottostante, moltiplicato per la distanza temporale alla scadenza dell'opzione. Il tutto è poi espresso in termini di deviazione standard del tasso d'interesse per la radice quadrata della distanza temporale alla scadenza dell'opzione.

Come si evince dalla formula, il prezzo di una swaption determinato tramite il modello di Black consiste nella somma scontata dei flussi di cassa futuri generati dallo swap sottostante, attualizzati al tasso di interesse risk-free.

Ciascuno dei valori attuali degli n flussi di cassa generati dall'IRS si calcola come il prodotto tra due termini. Il primo termine, $\alpha_{i-1,i} \times P(t, T_i)$, rappresenta l'attualizzazione del flusso netto di cassa futuro generato dall'IRS. Il secondo termine, $S(t, T_0, T_n) \times N(d_1) - K \times N(d_2)$, rappresenta il valore del flusso netto generato dall'IRS in base al tasso di interesse atteso e allo strike rate della swaption.

6.2 Pricing con Bachelier Model

Il modello di Bachelier può essere adattato per il calcolo del prezzo delle swaptions, mantenendo gli stessi vantaggi e limiti già analizzati nella sua applicazione ai caplets e floorlets. La formula per il prezzo di una swaption "payer", cioè che conferisce il diritto di entrare in uno swap come parte pagante del tasso fisso e ricevente del tasso variabile, è:

$$Payer(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1,i} P(t, T_i) \times \Big((S(t, T_0, T_n) - K) \times N(d_1) + \sqrt{V(t,T)} \times n(d_1)\Big)$$

dove:

$$d_1 = \frac{S(t, T_0, T_n) - K}{\sqrt{V(t, T)}}$$

e

$$V(t, T) = \sigma^2 \times (T - t).$$

Gli elementi della formula sono i seguenti:

- $\alpha_{i,i+1}$ è un coefficiente che rappresenta la ponderazione del tasso d'interesse per il periodo tra T_i e T_{i+1}. Viene utilizzato per calcolare l'accumulo di interessi nel periodo specificato.
- $P(t, T_i)$ è il fattore di sconto che riporta il valore futuro al tempo T_i al suo valore presente al tempo t, utilizzato per attualizzare il valore atteso del payoff.
- $S(t, T_0, T_n)$ è il tasso di interesse atteso del sottostante all'istante t per uno swap che inizia in T_0 e termina in T_n.
- K è il tasso di interesse strike della swaption.
- $N(d_1)$ è la funzione di distribuzione cumulativa normale per d_1, che indica la probabilità che la swaption scada "in the money" sotto il modello di Bachelier.
- $\sqrt{V(t, T)} \times n(d_1)$ riflette il ruolo della volatilità nel pricing della swaption, rappresentando la varianza cumulativa del tasso di interesse tra il momento attuale t e il tempo futuro T.
- $n(d_1)$ è la funzione di densità di probabilità della distribuzione normale standardizzata valutata in d_1.

Il valore di d_1 indica quanto il tasso swap atteso sia distante, in termini di deviazioni standard, dal tasso strike della swaption. Se d_1 è grande e positivo, il tasso swap atteso è molto superiore al tasso di esercizio, indicando un'alta probabilità che la swaption risulti "in the money".

6.3 Pricing con Displaced Black Model

Il modello Displaced Black è un modello di pricing avanzato per le swaptions che rappresenta un aggiustamento del modello Black-76. Simile ai modelli per caplets e floorlets, prevede un fattore di aggiustamento δ per considerare scenari con tassi negativi, non basandosi su una semplice distribuzione lognormale dei tassi di interesse futuri, ma su una traslazione δ di questa.

La formula per calcolare il prezzo di una payer swaption secondo il modello Displaced Black è la seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1,i} P(t, T_i) \times ((S(t, T_0, T_n) + \delta) \times N(d_1) - (K + \delta) \times N(d_2))$$

con

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S(t,T_n)+\delta}{K+\delta}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma_s^2 \times (T - t)}{\sigma_s \sqrt{T - t}}.$$

Anche in questo caso, come per il modello di Black-76, il prezzo della swaption corrisponde alla somma scontata dei flussi di cassa futuri generati dallo swap sottostante, valutati al tasso di interesse risk-free. Tutti i termini che compaiono nella formula presentano lo stesso significato del modello predecessore, con l'aggiunta del fattore di correzione δ, che viene utilizzato per tenere in considerazione la possibilità di tassi negativi. Questo fattore di correzione dipende dall'area economica e dai tassi di interesse applicati dalla relativa banca centrale.

7 Caps e Floors vs. Swaptions

La peculiarità delle swaptions è che le condizioni sulla base delle quali si decide di esercitare o meno l'opzione possono cambiare, favorevolmente o meno, dopo che l'opzione è stata esercitata. Questa caratteristica contribuisce a ridurre il premio da pagare per una copertura mediante swaptions rispetto al premio per una copertura simile tramite caps o floors, ossia portafogli di caplets e floorlets.

Ipotizziamo di considerare:

- una payer swaption con un tasso strike del 3% e scadenza di 2 anni, dove lo swap sottostante ha una durata di 3 anni e pagamenti annuali per entrambe le controparti.
- un portafoglio di caplets, o cap, che ne contiene 3 con lo stesso tasso strike del 3% e scadenze di 2, 3 e 4 anni.

Il tasso di riferimento dei caplets e quello utilizzato per il calcolo della gamba variabile dell'IRS sottostante la swaption sono identici. Ipotizziamo lo scenario in cui il tasso raggiunga il 4% al secondo anno, rendendo "in the money" sia la swaption sia il primo caplet, inducendo i potenziali investitori a esercitare queste opzioni.

Potrebbe poi verificarsi un calo del tasso di riferimento fino al 2%. Questo ribasso indurrebbe il possessore del cap a non riscattare gli altri due caplets, evitando così eventuali perdite. D'altro canto, il ribasso del tasso di riferimento costringerebbe chi aveva esercitato la swaption a continuare a pagare il tasso strike della swaption esercitata, ricevendo però un tasso variabile molto più basso rispetto al momento dell'esercizio, causando un possibile esborso di cassa.

Una volta che sia la swaption che il primo caplet sono stati esercitati, il payoff della swaption è ormai quello dello swap sottostante, simile a un future, senza possibilità di rinuncia in caso di payoff negativo. Al contrario, il payoff dei caplets può essere visto come il payoff di una call, che permette di non riscattare se i tassi scendono al di sotto dello strike rate.

Per questo motivo, così come il future è generalmente meno costoso della call a parità di condizioni, anche il caps avrà un premio più elevato rispetto alla corrispondente swaption.

8 Bibliografia

- Hull, J. C. (2022). Option, futures and other derivatives. Pearson.
- Joshi, M. S. (2003). The concepts and practice of mathematical finance. Cambridge University Press.

Questo report è stato creato dal Team di Fixed Income della divisione di Portfolio Management dello Starting Finance Club Bocconi.